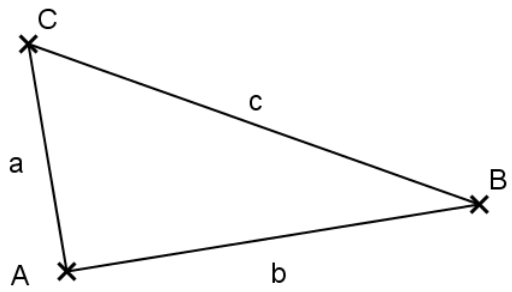
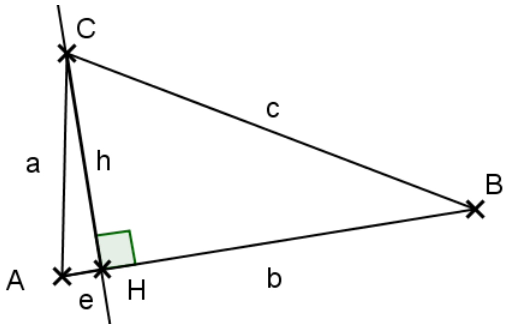
Démonstration de la propriété de l'égalité de Pythagore

Nous disposons d'un triangle pour lequel nous avons l'information suivante concernant les longueurs de ses côtés : $a^2 + b^2 = c^2$.



Nous voulons démontrer que ce triangle est un triangle rectangle en A.

Pour cela, nous allons **supposer que ce triangle n'est pas rectangle en A** et voir où cela va nous mener…
Dans ce cas, nous pouvons tracer la hauteur issue de C dans ABC, elle sera différente de (AC) et elle coupera donc [AB] en H différent de A, comme sur le schéma ci-contre :



Appelons e la distance AH et h la distance CH.
On a alors : HB = b – e.
Les triangles AHC et BHC sont tous les deux rectangles en H. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ces deux triangles :

(1) $a^2 = e^2 + h^2$ (2) $(b - e)^2 + h^2 = c^2$

(1) donne que $h^2 = a^2 - e^2$ ce qui permet de remplacer h2 par $a^2 - e^2$ dans (2). (2) devient alors :

$(b - e)^2 + a^2 - e^2 = c^2$

On développant $(b - e)^2$, cela donne :

$b^2 - 2eb + e^2 + a^2 - e^2 = c^2$
$b^2 - 2eb + a^2 = c^2$

Et comme $b^2 + a^2 = c^2$, en remplaçant à droite du "=" $b^2 + a^2$ par c^2, on obtient :

$c^2 - 2eb = c^2$.

Ce qui donne forcément que 2eb = 0. Comme b ne peut pas être égal à zéro, cela veut dire que e vaut obligatoirement 0.

Mais cela n'est pas possible car nous avons supposé que le point H était différent de A ! C'est donc que ce que nous avons supposé au départ du raisonnement est faux.

Donc le triangle ABC est rectangle en A.