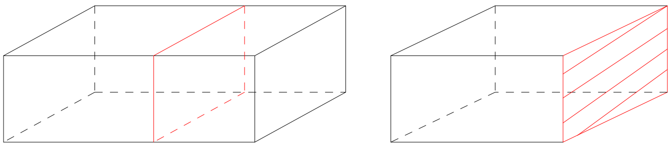
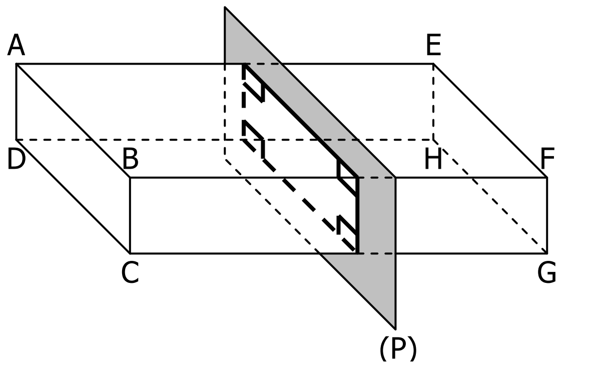
Géométrie dans l'espace

I] SECTION D'UN PAVE PAR UN PLAN

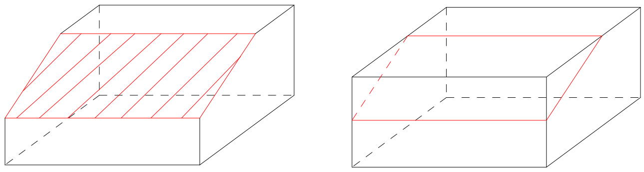
P : La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle identique à cette face.



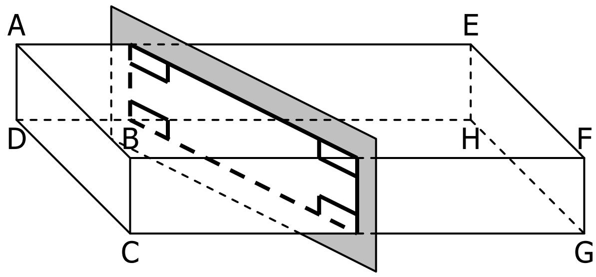
Exemple :
Le plan (P) est parallèle à la face ABCD (ou EFGH) :



P : La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.



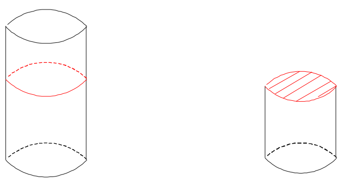
Exemple :
Le plan (P) est parallèle à l'arête [AD] (ou [BC] ou [EH] ou [FG]) :



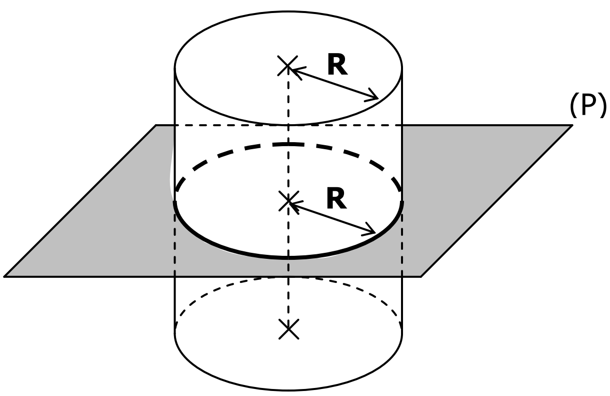
Exemple : dessiner, en vraie grandeur, la section d'un cube d'arête 5 cm par un plan contenant deux arêtes diagonalement opposées.

II] SECTION D'UN CYLINDRE DE REVOLUTION PAR UN PLAN

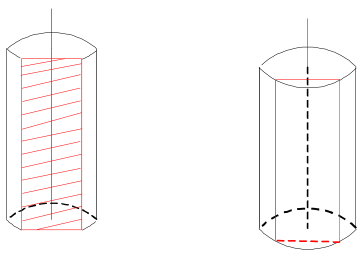
P : La section d'un cylindre de rayon R par un plan parallèle aux bases est un cercle de rayon R.



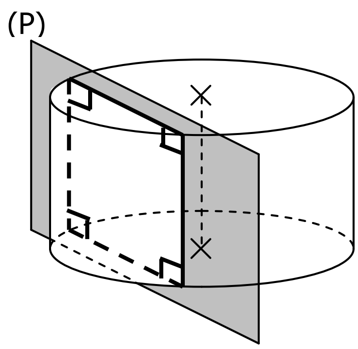
Exemple :
Le plan (P) est parallèle à la base du cylindre :



P : La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe de révolution est un rectangle.



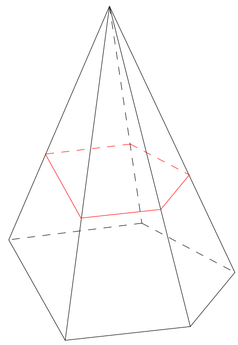
Exemple :
Le plan (P) est parallèle à l'axe du cylindre :

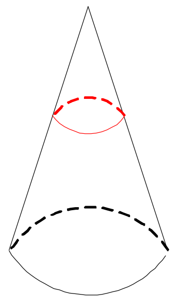


III] Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan

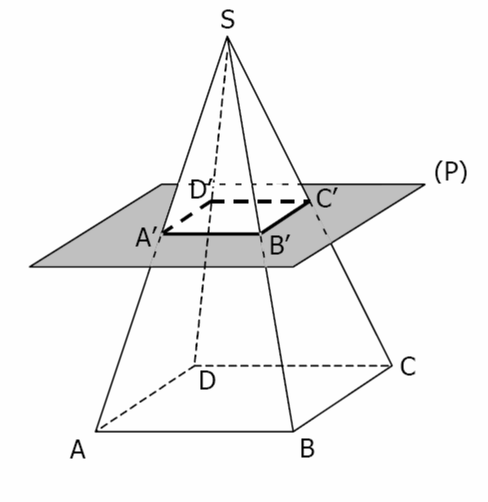
Propriété : La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est une **réduction de la base**. C'est à dire que c'est une figure de même nature (rectangle, carré, cercle…) mais dont les longueurs sont proportionnelles à celles de la base.
Le solide obtenu après la section est un réduction du solide de départ.

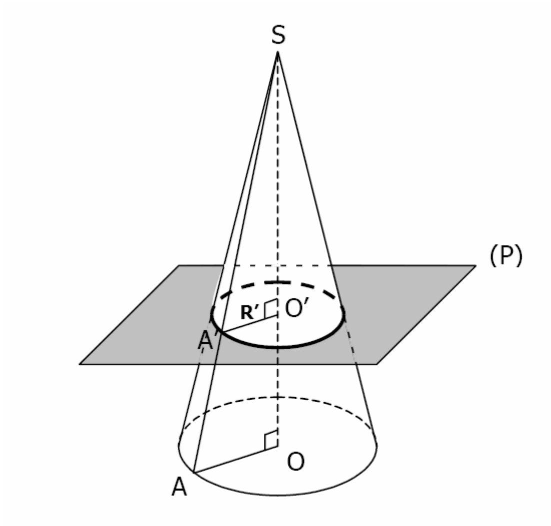
- Le rapport de réduction est égal au quotient d'une longueur de la réduction par la longueur correspondante du solide de départ.





Exemples **:** Pyramide à base carrée et cône de révolution.





Pyramide

Le carré A'B'C'D' est une réduction de ABCD.
La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de SABCD.
On remarque que :
(AB)//(A'B') (BC)//(B'C') (CD)//(C'D') (DA)//(D'A')
D'après la propriété de Thalès, on peut donc écrire :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k$$

C'est le rapport de la réduction (donc k < 1)

Cône de révolution

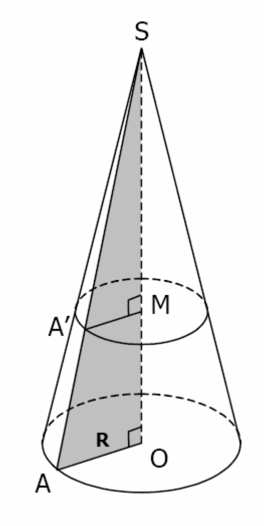
Le cercle de centre O' et de rayon R' est une réduction du cercle de centre O et de rayon R.
On remarque que : (OA) // (OA')
D'après la propriété de Thalès, on peut donc écrire :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'O'}{AO} = k$$

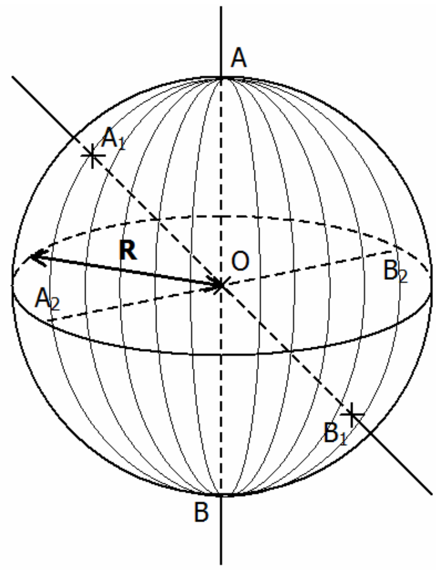
C'est le rapport de la réduction (donc k < 1)

Exercice : On considère un cône de révolution de sommet S, de hauteur SO = 15 cm et de volume 500 cm^3. M est le point de la hauteur tel que SM = 10 cm. Le plan parallèle à la base passant par M coupe SA en A'.

Calculer le rapport de réduction et en déduire le volume du cône de sommet S et de hauteur SM.



IV] Sphère



Définition : Soit O un point de l'espace. On appelle **sphère de centre O et de rayon R** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés à une distance R du point O.

Les segments [AB], $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ sont des **diamètres** de la sphère.
On dit que les points A et B sont **diamétralement opposés**.

Remarque : - L'intérieur de la sphère est appelé « boule de centre O », elle est constituée de tous les points situés à une distance inférieure ou égale à R du point O.

- Les cercles tracés à partir de diamètres de la sphère sont appelés grands cercles de la sphère.

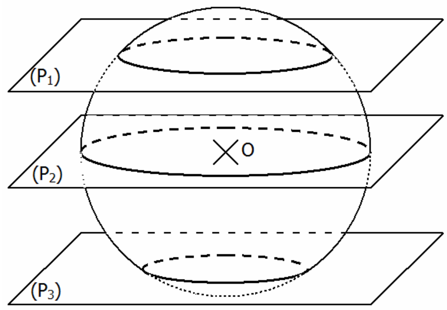
Aire de la sphère : L'aire A de la sphère de rayon R est $\boldsymbol{A = 4 \times \pi \times R^2}$

Volume de la boule : Le volume V d'une boule de rayon R est $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$

Exemples : 1) Calculer l'aire d'une sphère de rayon 7 cm. On dispose de 0,5 m^2 de papier pour l'envelopper, cela suffira-t-il ?

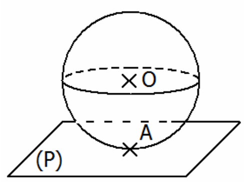
2) Calculer le volume d'une boule de 5 cm de diamètre. On veut la remplir d'eau, on dispose d'un litre d'eau, en aura-t-on assez ?

Section d'une sphère par un plan : La section d'une sphère par un plan est un cercle.

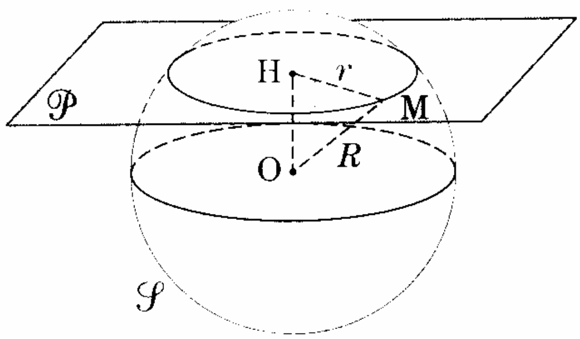


Remarque : Quand le plan passe par le centre O (Plan P_2), le cercle a le même rayon que la sphère : c'est un grand cercle.

Cas particulier : Quand la section de la sphère par le plan n'est qu'un point (un « cercle de rayon nul »), on dit que le plan est **tangent** à la sphère.



Exemple : Soit la sphère de centre O et de rayon R = 5 cm coupée par un plan **P** tel que OH = 3 cm.
La section obtenue est le cercle de centre H et de rayon r :
$R^2 = r^2 + OH^2$
$r^2 = R^2 - OH^2$
$r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$



Exercice : faire le dessin d'une sphère (S) de rayon 4 cm puis le dessin de la sphère (S'), réduction de (S) de rapport $\frac{1}{2}$.

Calculer le volume de la sphère (S) et en déduire celui de la sphère (S').