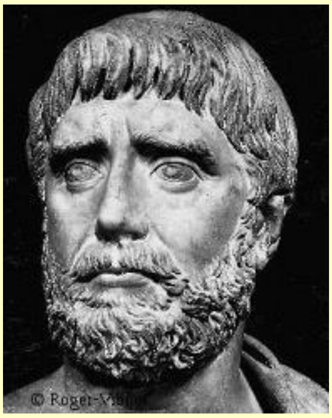
THEME 8

THALES
DEMONSTRATIONS

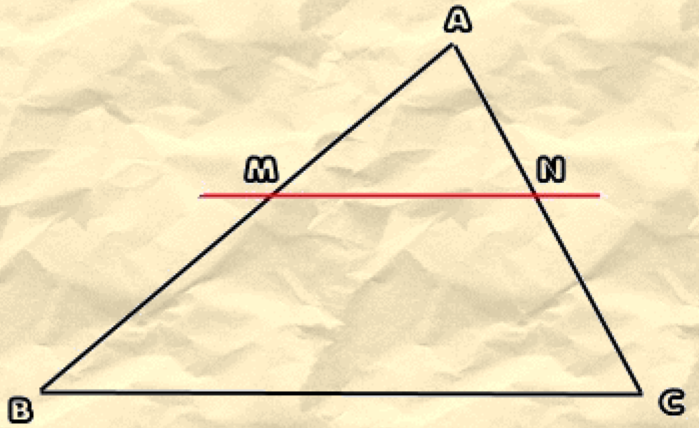


Rappel du théorème de Thalès :

Soit ABC un triangle.
Soit M un point de (AB) et soit N un point de (AC).

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ $\left(= \frac{MN}{BC} \right)$



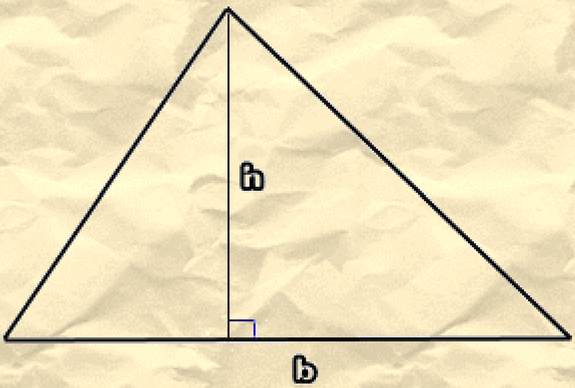
▶ DEMONSTRATION D'EUCLIDE PAR LA METHODE DES AIRES

Remarque préliminaire 1:

L'aire d'un triangle est égale à

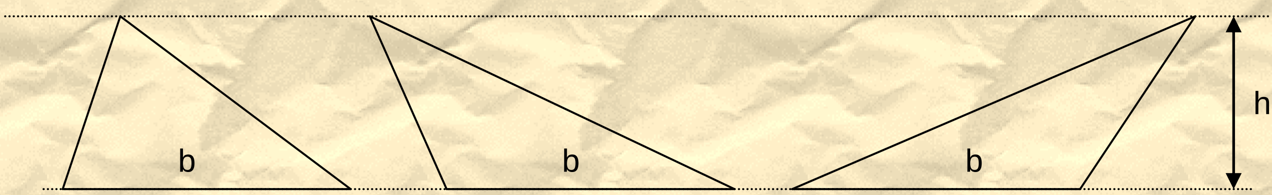
$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$

(où b représente la mesure de la base et h celle de la hauteur associée à cette base)



Propriété :

L'aire d'un triangle ne change pas lorsqu'un des sommets se "déplace" parallèlement à son côté opposé.



(Même base et même hauteur)

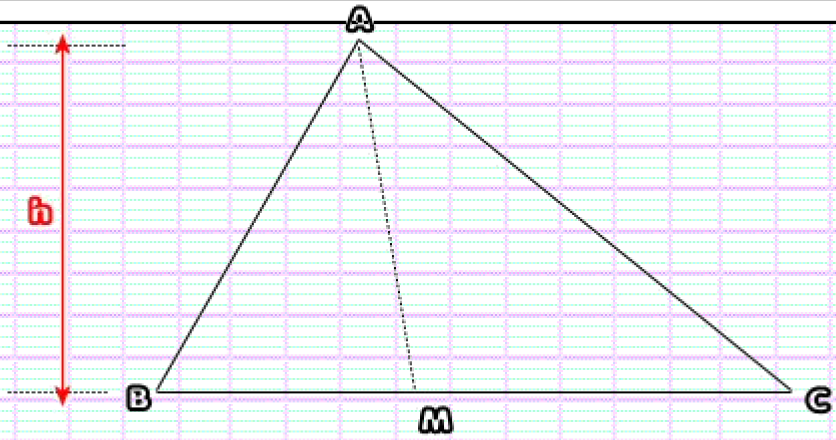
Remarque préliminaire 2 :

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle et soit M un point du segment [BC].
Montrer que le rapport des aires des triangles ABM et ACM est égal au rapport des longueurs BM et CM
(C'est à dire, montrer que :

$$\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ACM}} = \frac{BM}{CM}$$

avec $\mathcal{A}_{ABM}$ l'aire du triangle ABM et $\mathcal{A}_{ACM}$ l'aire du triangle ACM)



L'aire du triangle ABM est égale à : $\frac{BM \times h}{2}$

L'aire du triangle ACM est égale à : $\frac{CM \times h}{2}$

Par conséquent , le rapport des aires de ces deux triangles est égal à :

$$\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ACM}} = \frac{\frac{BM \times h}{2}}{\frac{CM \times h}{2}} = \frac{BM \times h}{2} \times \frac{2}{CM \times h} = \frac{BM \times \cancel{h} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times CM \times \cancel{h}} = \frac{BM}{CM}$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ACM}} = \frac{BM}{CM}}$$

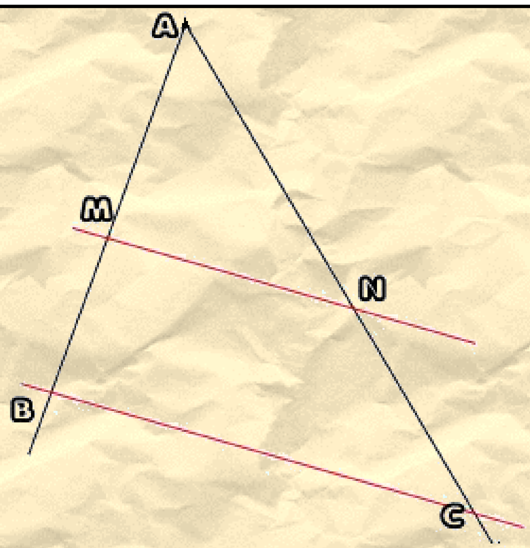
Donc , le rapport des aires des deux triangles est égal au rapport des longueurs de leurs bases .

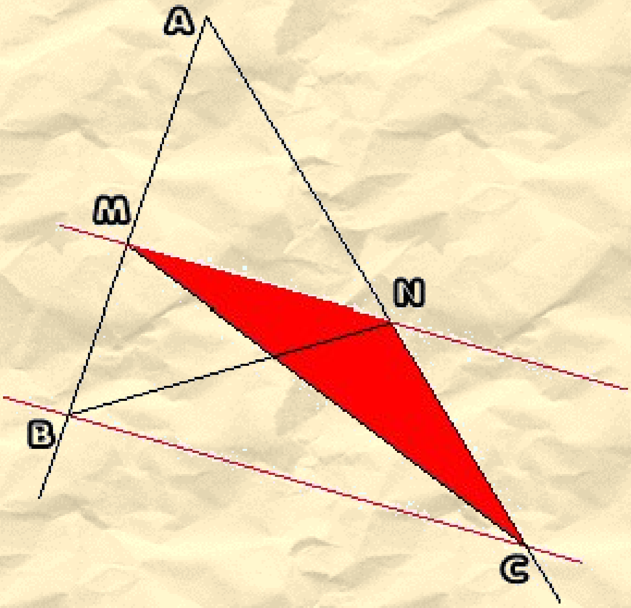
Remarque : En utilisant une démonstration analogue, nous avons de même :

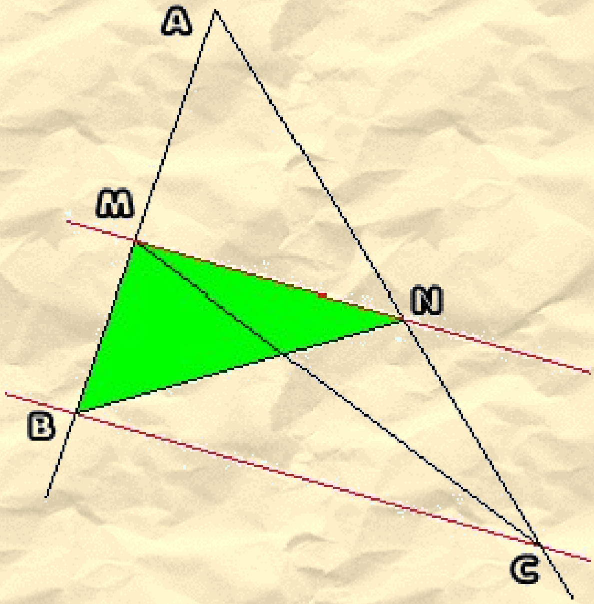
$$\boxed{\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{BM}{BC}}$$

Démonstration du théorème de Thalès par Euclide :

Les deux droites (MN) et BC) sont parallèles .

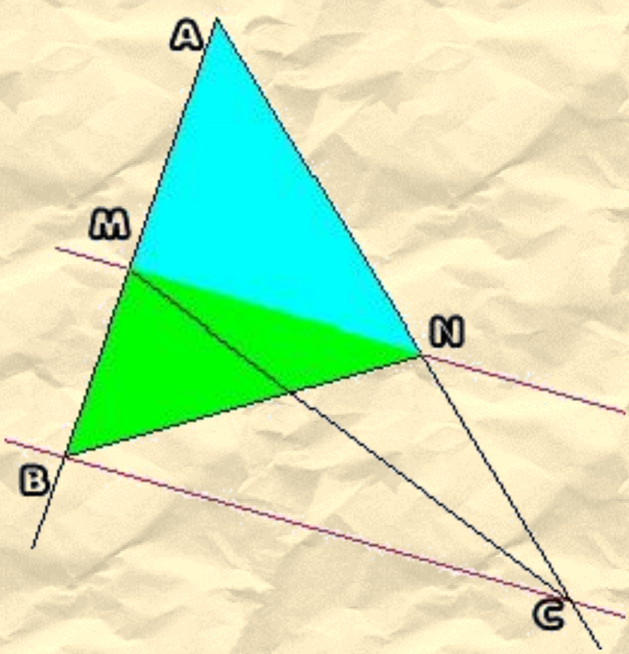


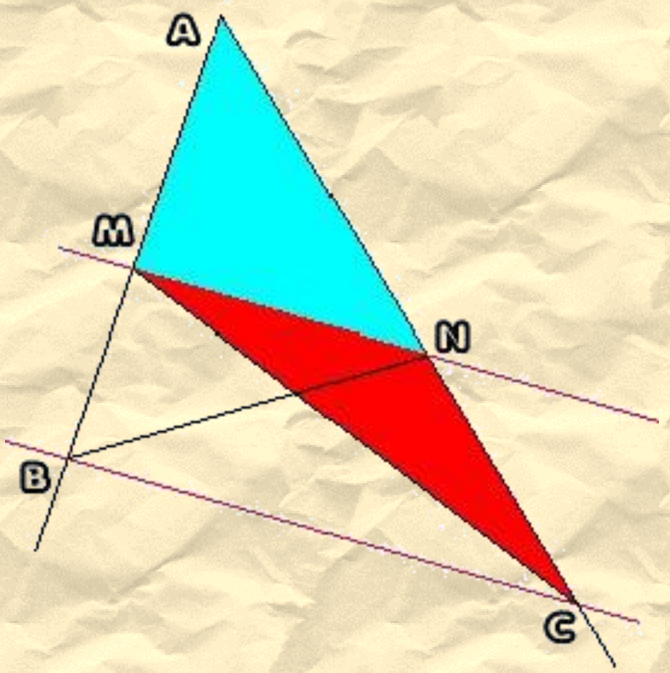




Considérons les triangles BMN et CMN.
Ces deux triangles ont la même base [MN] et la même hauteur , donc ils ont même aire .
(le sommet B et le sommet C sont sur une parallèle à la base - cf. propriété ci-dessus)

Considérons maintenant les triangles BAN et CAM





Nous avons , en écrivant, par exemple, $\mathcal{A}_{BAN}$ l'aire du triangle BAN :

$$\mathcal{A}_{BAN} = \mathcal{A}_{AMN} + \mathcal{A}_{BMN}$$

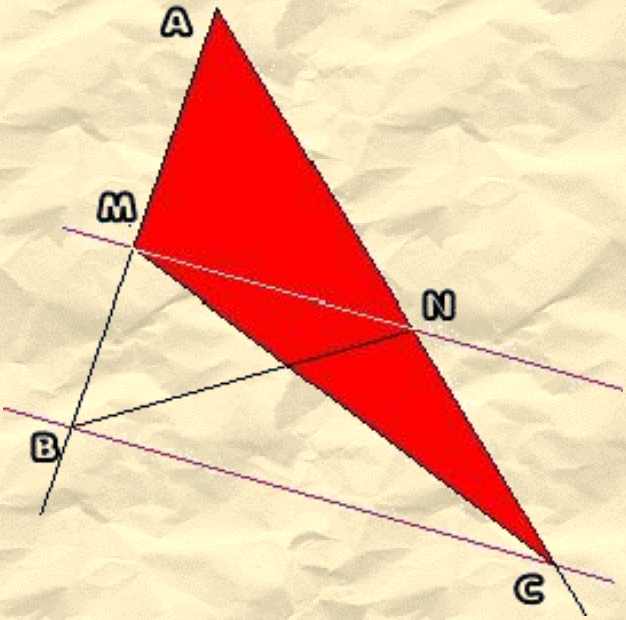
et $$\mathcal{A}_{CAN} = \mathcal{A}_{AMN} + \mathcal{A}_{CMN}$$

Mais nous avons démontré ci-dessus que les deux triangles BMN et CMN ont la même aire.

Donc , comme $\mathcal{A}_{BMN} = \mathcal{A}_{CMN}$, nous pouvons écrire :

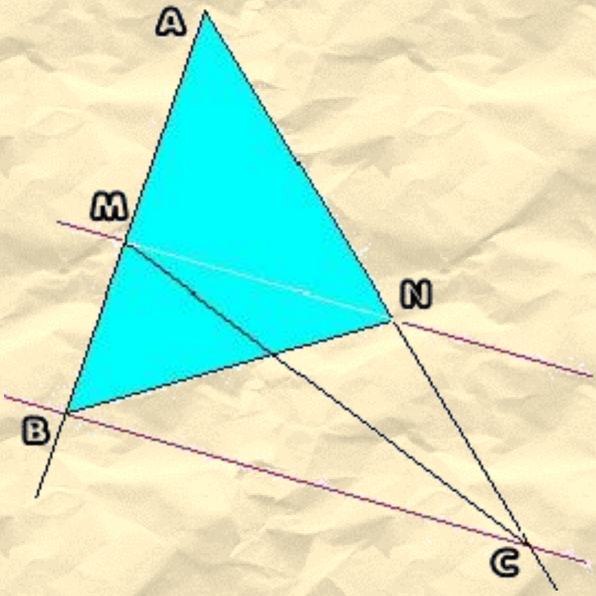
$$\mathcal{A}_{BAN} = \mathcal{A}_{CAN}$$

<u>Les deux triangles BAN et CAM ont la même aire.</u>



Considérons les deux triangles AMC et ABC. Ces deux triangles ont la même hauteur (c'est la distance du point C à la droite (AB).
En utilisant la remarque préliminaire ci-dessus (cf. Remarque préliminaire 2), nous avons :

$$\frac{\mathscr{A}_{AMC}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$$



Considérons maintenant les deux triangles ANB et ACB. Ces deux triangles ont la même hauteur. De la même façon que précédemment, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathscr{A}_{ABN}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$$

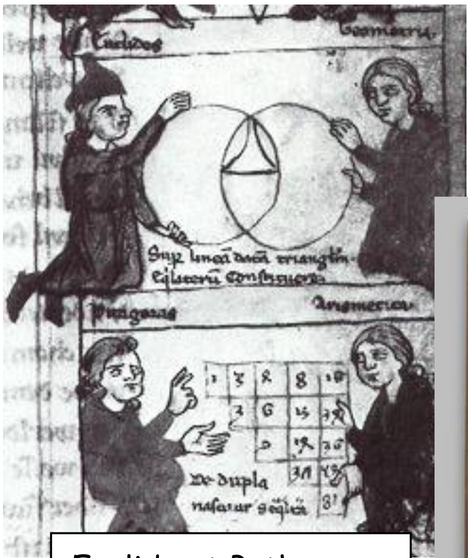
Comme les deux triangles ABN et AMC ont la même aire (cf. démonstration ci-dessus), les deux rapports sont égaux :

$$\frac{\mathscr{A}_{AMC}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{\mathscr{A}_{ABN}}{\mathscr{A}_{ABC}}$$

Et par suite :

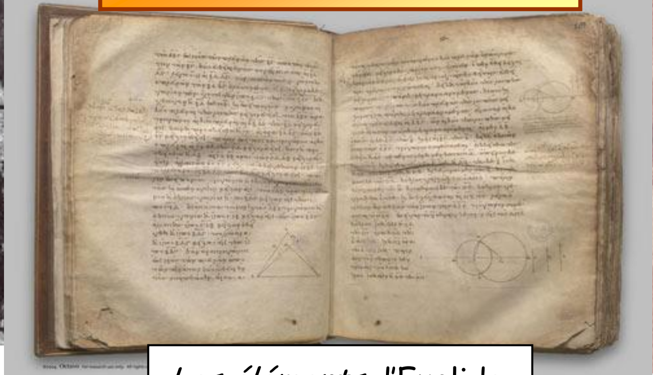
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Nous venons de démontrer le théorème de Thalès .

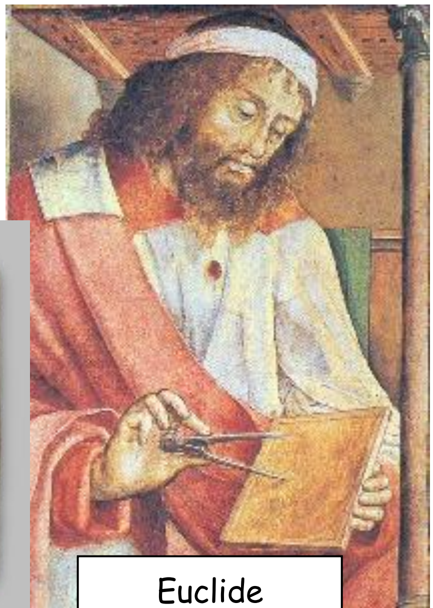


Euclide et Pythagore

C'est dans le livre VI de son ouvrage *Les éléments* qu'Euclide présenta la première démonstration du théorème de Thalès



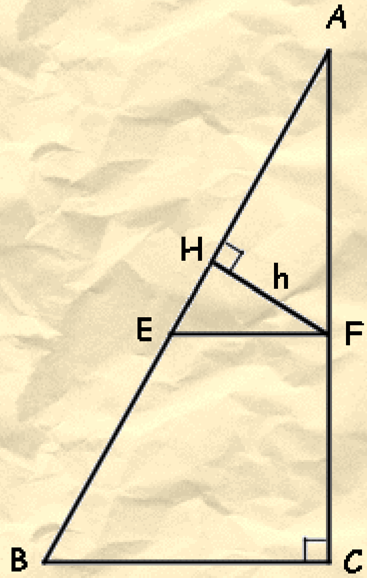
Les éléments d'Euclide



Euclide

UNE AUTRE DEMONSTRATION

Soit ABC un triangle .
Soit E un point de [AB] et soit F un point de [AC].
Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.
Soit H le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par F.



Calculons les aires des triangles AEF, ABC et du trapèze EFCB.
Nous avons :

$$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{EF \times AF}{2} \qquad \mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AC}{2}$$

$$\mathscr{A}_{EFCB} = \frac{(EF + BC) \times FC}{2}$$

Mais $\mathscr{A}_{AEF} + \mathscr{A}_{EFCB} = \mathscr{A}_{ABC}$,donc :

$$\frac{EF \times AF}{2} + \frac{(EF + BC) \times FC}{2} = \frac{BC \times AC}{2}$$

Soit $$\frac{EF \times AF + (EF + BC) \times FC}{2} = \frac{BC \times AC}{2}$$

$$EF \times AF + (EF + BC) \times FC = BC \times AC$$

$$EF \times AF + EF \times FC + BC \times FC = BC \times AC$$

$$EF \times AF + EF \times FC = BC \times AC - BC \times FC$$

$$EF \times (AF + FC) = BC \times (AC - FC)$$

Or $AF + FC = AC$ et $AC - FC = AF$

Donc $EF \times AC = BC \times AF$

$EF \times AC = BC \times AF$

d'où : $$\boxed{\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}}$$

D'autre part (en appelant h la longueur de FH) :

$$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{AE \times h}{2}$$

Comme l'aire du triangle AEF est également égale à $\frac{EF \times AF}{2}$, nous avons :

$$\frac{AE \times h}{2} = \frac{EF \times AF}{2} \quad (\text{ égalité } 1)$$

De même , l'aire du triangle ABF peu s'écrire de deux manières différentes :

$$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{AB \times h}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{AEF} = \frac{AF \times AB}{2}$$

Et donc : $$\frac{AB \times h}{2} = \frac{AF \times BC}{2} \quad (\text{ égalité } 2)$$

L'égalité 1 permet d'écrire AE x h = EF x AF et par suite $\frac{h}{AF} = \frac{EF}{AE}$

L'égalité 2 permet d'écrire AB x h = AF x BC et par suite $\frac{h}{AF} = \frac{BC}{AB}$

Nous avons donc :

$$\boxed{\frac{EF}{AE} = \frac{BC}{AB}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{EF}{AE} \quad \frac{BC}{AB}$$

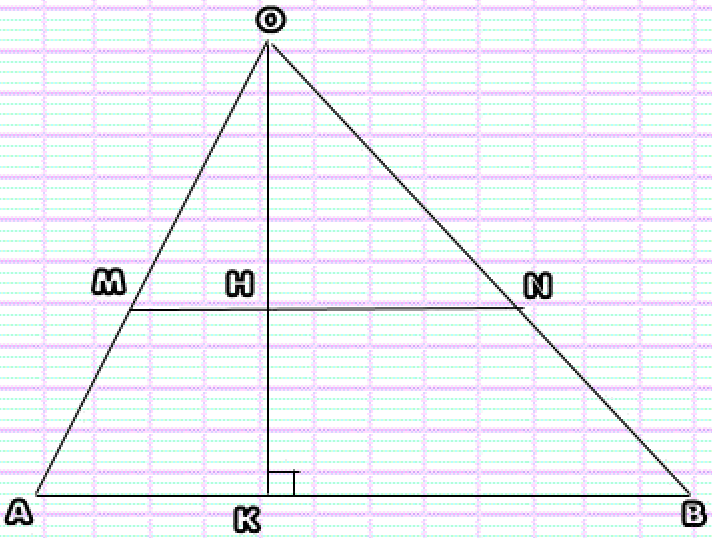
Nous retrouvons les rapports connus : $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$

Soit, en ordonnant, pour retrouver l'écriture habituelle :

$$\boxed{\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}}$$

UNE AUTRE DEMONSTRATION (sous forme d'exercice)

Exercice 1 :



Soit OAB un triangle. Soit M un point du segment [OA]. La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe [OB] en N.
La perpendiculaire à la droite (AB) passant par O coupe (MN) en H et (AB) en K.

a)Calculer de deux manières différentes $\cos \widehat{KOA}$

(utiliser deux triangles).

En déduire que : $\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OK}{OA}$,

puis que $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{OH}{OK}$

b)Calculer de deux manières différentes $\cos \widehat{KOB}$

(utiliser deux triangles).

En déduire que : $\dfrac{OH}{ON}=\dfrac{OK}{OB}$, puis que $\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{OH}{OK}$

c)Déduire des deux résultats précédents que : $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{ON}{OB}$

Nous venons de démontrer la propriété de Thalès lorsque M et N appartiennent aux côtés du triangle OAB.

Et le troisième rapport ?

d)La parallèle à la droite (OA) passant par le point N coupe (AB) en L.

Montrer que, en utilisant le résultat de la question c : $\dfrac{BN}{BO}=\dfrac{BL}{BA}$, puis en simplifiant $1-\dfrac{BN}{BO}=1-\dfrac{BL}{BA}$,

montrer que $\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{AL}{BA}$ puis $\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{MN}{AB}$

$$\boxed{\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{MN}{AB}}$$

Remarque : (Classe de troisième) Si M et N étaient respectivement sur les demi-droites [OA) et [OB), mais pas sur les segments [OA] et [OB], la démonstration précédente serait encore correcte. Il suffirait d'inverser le rôle des points A et B et des points M et N.

Soit OAB un triangle. Soit M un point de la demi-droite d'origine O ne contenant pas A. La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe (OB) en N.

Soient M' et N' les symétriques des points M et N par rapport à O.

Montrer l'égalité des trois rapports $\dfrac{OM'}{OA}=\dfrac{ON'}{OB}=\dfrac{M'N'}{AB}$, puis en constatant que OM = OM' , ON =ON'

et en démontrant que MN = M'N' , en conclure que $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{MN}{AB}$