Théorème de Thalès ; réciproque et contraposée du théorème de Thalès

I] Théorème de Thalès

Activité : fichier « CH Thalès – activités.doc »

Propriété : Théorème de Thalès.

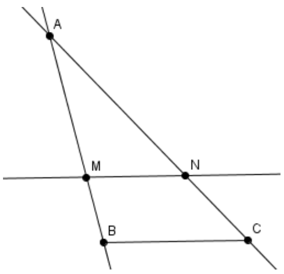
Soient deux droites (d) et (d’) sécantes en A. Soient M et B deux points de (d) distincts de A ; soient N et C deux points de (d’) distincts de A.

Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

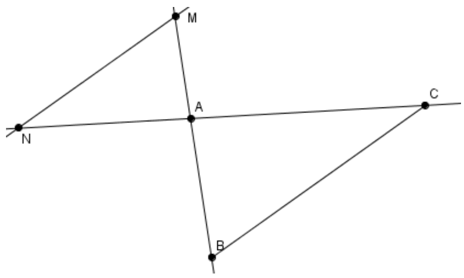
(C’est-à-dire que les triangles AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels.)

Remarque : par rapport au théorème de $4^{\text{ème}}$, ce théorème nous permet de calculer des longueurs dans une nouvelle configuration (dit du « papillon » ou du « sablier ».

Cas de $4^{\text{ème}}$

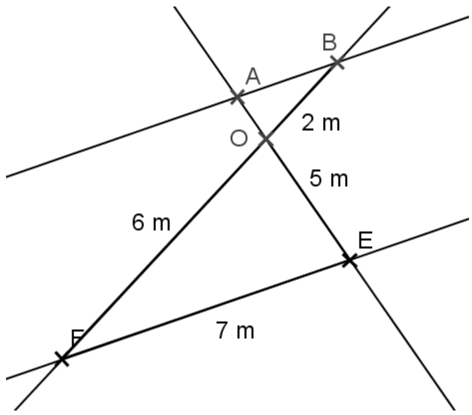


Cas de 3ème



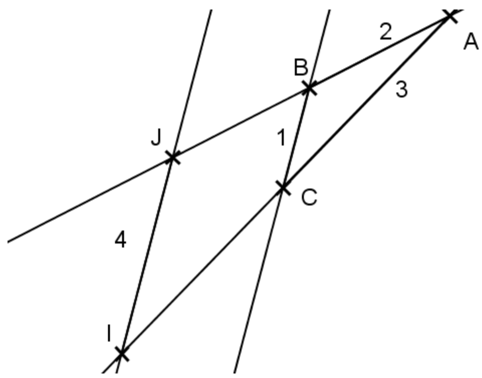
Exemple n°1 : on considère le schéma ci-contre dans lequel les longueurs ne sont pas respectées :

Calculer OA et AB.



Exemple n°2 : on considère le schéma ci-contre dans lequel les longueurs ne sont pas respectées ; l’unité est le cm :

Calculer AI et JB.



II] Réciproque du théorème de Thalès

<u>Activité</u> : deux tracés de droites sécantes (un 4ème et un 3ème avec des points placés tels qu'on ait les fractions égales. Constat et démonstration à l'oral.

<u>Propriété</u> : Réciproque du Théorème de Thalès.

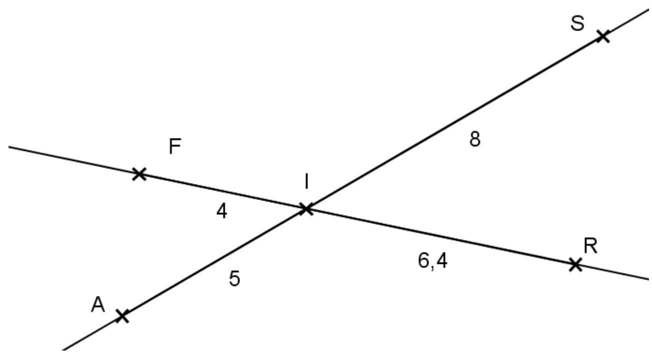
Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. Soient M et B deux points de (d) distincts de A ; soient N et C deux points de (d') distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et que les points A, M, B et A, N, C sont alignés <u>dans le même ordre</u> alors (MN) // (BC).

<u>Exemple 1</u> : on considère le schéma ci-contre dans lequel les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Les droites (AF) et (SR) sont-elles parallèles ? Justifier.

(« tout part de I »)



$$\frac{IF}{IR} = \frac{4}{6,4} = \frac{5}{8}$$

(calculatrice en mode « math » et affichage du résultat en fraction irréductible.)

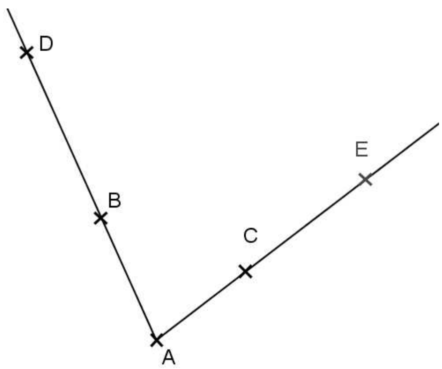
$$\frac{IA}{IS} = \frac{5}{8}$$

Comme $\frac{IF}{IR} = \frac{IA}{IS}$ et que les points F, I, R et A, I, S sont alignés dans le même ordre alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès : (AF) est parallèle à (SR).

<u>Exemple 2</u> : on considère le schéma ci-contre. On donne les longueurs suivantes : AB = 4 km ; AC = 3 km ; AD = 9,2 km et AE = 7 km.

Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ? Justifier.

(« tout part de A »)



$$\frac{AB}{AD} = \frac{4}{9,2} = \frac{10}{23}$$

(calculatrice en mode « math » et affichage du résultat en fraction irréductible.)

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{7}$$

<u>Rédaction n°1</u>

Comme $\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$ et que les points A, B, D et A, C, E sont alignés dans le même ordre alors, d'après la contraposée du théorème de Thalès : (BC) n'est pas parallèle à (DE).

<u>Rédaction n°2</u>

$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$. Si les droites (BC) et (DE) étaient parallèles alors, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AD}$ serait égale à $\frac{AC}{AE}$. Donc (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

<u>Contre-exemple</u> : l'ordre des alignements est important. Sur le dessin ci-dessous, les longueurs entre graduations sont égales ; on a bien $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (elles sont égales à $\frac{1}{3}$) mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas du tout parallèles !
Cela vient du fait que les points A, M et B ne sont pas alignés dans le même ordre que A, N et C.