Systèmes de deux équations à deux inconnues

Activité 1

1) Trouver des couples de valeurs qui vérifient l'équation à deux inconnues : $2x + 5y = -9$.
2) Trouver des couples de valeurs qui vérifient l'équation à deux inconnues : $4x - 10y = 30$.
3) Trouver des couples de valeurs qui vérifient à la fois l'équation $2x + 5y = -9$ **et** l'équation $4x - 10y = 30$.

Définition sur un exemple : résoudre le système $\begin{cases} 2x+5y=-9 \\ 4x-10y=30 \end{cases}$, c'est trouver tous les couples (x ; y) qui vérifient à la fois les deux équations de ce système.

I] Méthodes de résolution sur des exemples

Méthode-exemple n°1 : « Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants ; il paie 2,80€. Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants ; il paie 2,10€. Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant. »

On nomme x le prix d'un pain au chocolat et y le prix d'un croissant. L'énoncé se traduit par les deux équations suivantes : $\begin{cases} 3x+2y=2{,}80 \\ x+3y=2{,}10 \end{cases}$

L'accolade signifie que ces deux égalités sont liées, elles doivent être vraies pour les mêmes valeurs de x et de y. On appelle cela un système de deux équations à deux inconnues.

Résolution du système d'équations par substitutions : $\begin{cases} 3x+2y=2{,}80 \\ x+3y=2{,}10 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=2{,}80 \\ x=2{,}10-3y \end{cases}$ On isole une inconnue dans une équation.

$\begin{cases} 3(2{,}10-3y)+2y=2{,}80 \\ x=2{,}10-3y \end{cases}$ On substitue l'inconnue isolée dans l'autre équation.

$\begin{cases} 6{,}30-9y+2y=2{,}80 \\ x=2{,}10-3y \end{cases}$ On résout cette équation pour trouver une inconnue.

$\begin{cases} -7y=-3{,}50 \\ x=2{,}10-3y \end{cases}$

$\begin{cases} y=0{,}50 \\ x=2{,}10-3\times 0{,}50 \end{cases}$ Cette inconnue étant trouvée, on la substitue dans l'autre équation.

$\begin{cases} y=0{,}50 \\ x=0{,}60 \end{cases}$ On calcule la $2^{\text{ème}}$ inconnue.

La solution du système est le couple (0,60 ; 0,50).

Conclusion : Le prix d'un pain au chocolat est de 0,60 € et le prix d'un croissant est de 0,50 €.

Méthode-exemple n°2 : Résoudre le système suivant par combinaisons linéaires : $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 4x-5y=-16 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 4x-5y=-16 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \text{L1} \\ \text{L2} \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} 12x + 8y = 44 \\ 12x - 15y = -48 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 4L1 \\ 3L2 \end{vmatrix}$$

4L1 – 3L2 donne : $23y = 92$

$y = \dfrac{92}{23}$

$y = 4$

On remplace y par 4 dans une des deux équations de départ. Ici dans L1 :

$3x + 2\times 4 = 11$

$3x = 11 - 8$

$3x = 3$

$x = 1$

La solution du système est le coupe (1 ; 4)

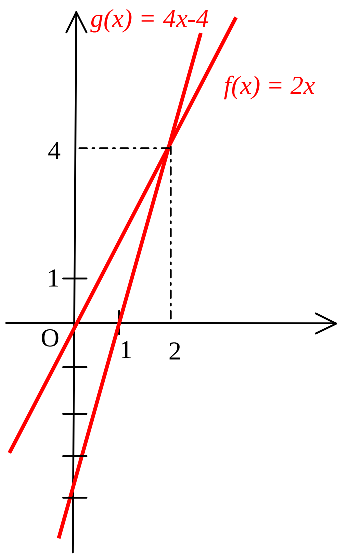
<u>Exemple n°1</u> : résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 5y = -9 \\ 4x - 10y = 30 \end{cases}$

<u>Exemple n°2 (exercice de Brevet)</u> : Une élève de CP fait des courses pour elle et ses camarades :

- la première fois elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 10,90 €.
- la deuxième fois elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 17,20 €.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de CP à retrouver le prix de chaque article.

II] Interprétation graphique d'un système



On considère le système (S) : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$.

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$

On désigne respectivement par *(d)* et *(d')* les droites représentant les fonctions affines *f* et *g* définies par : f(x) = 2*x* et g(x) = 4*x* – 4

La solution du système est alors le couple (*x* ; *y*) coordonnées du point d'intersection des deux droites *(d)* et *(d')*.

Par lecture graphique, on trouve le couple (2 ; 4) comme solution du système.

Attention : la lecture graphique est imprécise. Si l'on veut obtenir la solution exacte du système, il faut donc vérifier par le calcul pour être sûr d'avoir trouver le couple solution…

Résumé : Quand on isole y dans chaque ligne d'un système, on associe une droite à chaque équation du système. Le couple solution (s'il existe) correspond aux coordonnées de l'intersection des deux droites.

<u>Exemple</u> : Déterminer graphiquement la solution du système suivant : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$. Vérifier ensuite par le calcul.

III] Une application

« Déterminer la fonction affine *f* telle que *f*(3) = –2 et *f*(5) = 1. »