CH Calculs avec les racines carrées

I] Définition, vocabulaire, notation

Activité :

1) Trouver le (ou les) nombre dont le carré vaut 9 :
2) Trouver le (ou les) nombre dont le carré vaut 64 :
3) Trouver le (ou les) nombre dont le carré vaut 4,9729 :
4) Trouver le (ou les) nombre dont le carré vaut −25 :
5) Trouver le (ou les) nombre dont le carré vaut 5 :

[au 5, prendre l'affichage de la calculatrice, taper le nombre décimal et l'élever au carré…]

Définition : soit a un nombre positif.

On appelle racine carré de a le nombre positif qui, élevé au carré, vaut a. On le note $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Exemples : $\sqrt{16} = 4$ car 4 élevé au carré vaut 16.

$\sqrt{25} = 5$; $-\sqrt{144} = -12$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$ …

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$

$\left(\sqrt{8}\right)^2 = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$ $\qquad$ $\left(-\sqrt{15}\right)^2 = \left(-\sqrt{15}\right) \times \left(-\sqrt{15}\right) = 15$

$\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

Conséquences de la définition : soit a un nombre positif :

1) une autre façon de noter la définition : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
2) la règle des signes : $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$
3) propriété : $\sqrt{a^2} = a$

Exercices : 6, 7, 8 et 10 page 56 ; 11, 14, 16, 17, 18, 20 page 56 ; 76 page 59…

II] Propriétés

Activité : à la calculatrice : $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ et $\sqrt{18}$; d'autres exemples puis constat et éventuellement démonstration en partant de $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2$

Propriété 1 : soient a et b deux nombres positifs :

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

Méthode sur un exemple : soit $A=\sqrt{50}$. On veut écrire A sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible.

On écrit 50 sous la forme d'un produit dans lequel un des facteurs aura une racine carrée entière. Pour cela, il faut connaître les racines carrées entières (voir encadré).

$A=\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

$\sqrt{1}=1$
$\sqrt{4}=2$
$\sqrt{9}=3$
$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$
$\sqrt{49}=7$
$\sqrt{64}=8$
$\sqrt{81}=9$
$\sqrt{100}=10$

Exemples : écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible les nombres ci-dessous :

$B=\sqrt{32}$ $\quad$ $C=\sqrt{48}$ $\quad$ $D=3\sqrt{18}$

$E=\sqrt{63}-5\sqrt{7}$ $\quad$ $F=2\sqrt{8}-6\sqrt{2}+5\sqrt{50}$ $\quad$ $G=5\left(2+\sqrt{3}\right)$

Exercices (piocher quelques calculs dans chaque exercice) : 36, 37 page 57 ; 42, 45, 46 page 57.

Activité : à la calculatrice : $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$ et $\sqrt{\dfrac{14}{6}}$; d'autres exemples puis constat et éventuellement démonstration.

Propriété 2 : soient a et b deux nombres positifs avec b non nul :

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples : écrire sous la forme $\sqrt{a}$ avec *a* entier ou décimal : 37 page 58 + $G=\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

Exercices (sur pté 2) : 40 et 41 page 57.

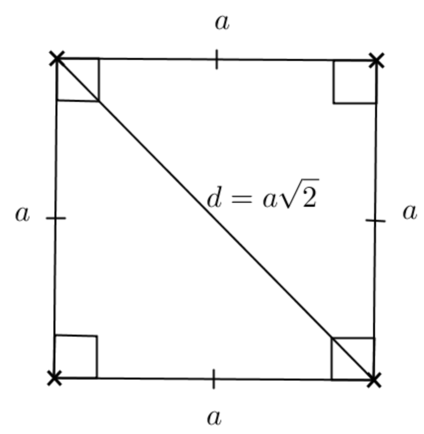
Remarque : ATTENTION, il n'existe pas de propriété semblable aux propriétés 1 et 2 pour l'addition de racines carrées. Voici deux contre-exemples :

$\sqrt{16}+\sqrt{9}\neq\sqrt{16+9}$: En effet, $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ et $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
$\sqrt{5}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5+3}$: En effet, $\sqrt{5}+\sqrt{3}\approx 3{,}968$ et $\sqrt{5+3}=\sqrt{8}\approx 2{,}828$

Exercices : calculs sur les racines carrées (piocher dans chaque exercice) : 47 à 65 page 58.

II] Les racines carrées en géométrie

Diagonale d'un carré : en appliquant le théorème de Pythagore dans un des triangles rectangles isocèles, on obtient : $d^2 = a^2 + a^2$, soit $d^2 = 2a^2$.
Donc $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$.



[on peut aussi s'intéresser à cos 45° et sin 45° en montrant le lien avec l'affichage en mode math de la calculatrice : $\frac{\sqrt{2}}{2}$]

Spirale d'Archimède : elle permet de construire géométriquement les racines carrées des entiers successifs :

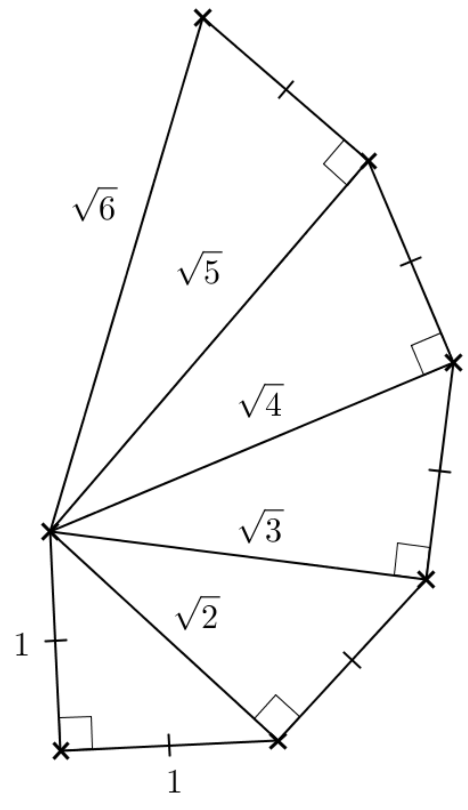
On commence par tracer un triangle rectangle isocèle de côté 1 (cm par exemple).

Ensuite, on trace la perpendiculaire à l'hypoténuse passant par un des sommets de l'hypoténuse et on reporte la longueur 1 sur cette perpendiculaire. On obtient alors un nouveau triangle rectangle.

On continue ce processus en partant à chaque fois de l'hypoténuse du triangle rectangle obtenu.

$\sqrt{2}$ s'obtient en utilisant la diagonale du carré.
Pour $\sqrt{3}$, si on note h l'hypoténuse du premier triangle rectangle non isocèle obtenu par la construction, en appliquant le théorème de Pythagore :

$h^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$
$h^2 = 2 + 1$
$h^2 = 3$
$h = \sqrt{3}$



Pour les racines suivantes, on applique le théorème de Pythagore dans chaque triangle rectangle…