A la conquête des nombres

Au commencement...

On pense que la pratique de l'élevage et de l'agriculture conduisit les hommes à dénombrer des troupeaux et à élaborer des calendriers. Ils auraient manipulé des nombres entiers positifs que les mathématiciens nomment **nombres entiers naturels**. Pour écrire ces nombres, les diverses civilisations ont imaginé des systèmes de numérations très variés.

Problèmes de partages : nombres rationnels

Avec les problèmes de partages sont apparues des fractions simples comme $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$, etc. Rappelons que, pour un mathématicien, une **fraction doit avoir son numérateur et son dénominateur entiers**. Les Egyptiens savaient additionner des quantièmes (fractions de numérateur 1). Puis, les Grecs ont effectué les quatre opérations sur des «rapports de grandeurs », comme le montre le livre 5 des Eléments d'Euclide, écrits au 3e siècle avant J.-C. En particulier, les Grecs savaient calculer avec les nombres écrits sous forme fractionnaire et qu'on nomme **nombres rationnels**.

Racines carrées et nombres irrationnels

Les Grecs ont découvert avec étonnement que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Ils l'ont qualifié d'«irrationnel », de «non énonçable », ce qui traduisait leur embarras. Vers l'an 1000, les mathématiciens arabes et persans n'ont pas hésité à considérer tous les rapports de longueurs comme des nombres. Depuis ce temps-là, on admet qu'à côte des nombres rationnels, il en existe d'autres - **les irrationnels** - qui n'ont pas d'écriture fractionnaire. L'un des plus célèbres est le nombre π ; c'est seulement en 1761 que le Français LAMBERT démontra l'irrationalité de π.

Irruption du zéro et des nombres relatifs

Au 7e siècle après J.-C., le mathématicien indien BRAHMAGUPTA énonça des règles pour opérer sur trois sortes de nombres appelés « biens », «dettes» et «zéro». On avait ainsi inventé **les nombres relatifs**. Grâce à eux, la soustraction est toujours possible : par exemple : $3 - 7 = -4$. Cependant les mathématiciens furent longtemps réticents avant d'accepter les nombres négatifs. Au 17e siècle, DESCARTES qualifiait encore de « fausses » ou « moindres que rien » les solutions négatives d'une équation.

Pour faciliter les calculs : apparition des décimaux

Le fait d'écrire les nombres entiers avec un chiffre pour les unités, un chiffre pour les dizaines, un chiffre pour les centaines, etc. facilite beaucoup les opérations (essayez de faire une multiplication avec des chiffres romains !). Au fil du temps, les mathématiciens ont remarqué que les opérations sur des nombres non entiers seraient également facilitées si l'on avait un chiffre pour les dixièmes, un chiffre pour les centièmes, etc. En 1582, le Flamand STEVlN publia un traité complet sur l'usage des **nombres décimaux**. Ceux-ci ne sont que des nombres rationnels particuliers (car tout décimal s'écrit sous forme de fraction : par exemple : $1{,}998 = \frac{1998}{1000}$). Mais ils ont un intérêt pratique car ils fournissent des valeurs approchées pour les autres nombres, rationnels ou irrationnels : par exemple, on remplace souvent π par sa valeur arrondie à deux décimales (3,14).

La grande famille des nombres réels

Les nombres relatifs évoqués ci-dessus, rationnels et irrationnels, constituent l'ensemble des **nombres réels**. Lorsqu'on gradue une droite, tout point a pour abscisse un nombre réel, et tout nombre réel est l'abscisse d'un point. C'est pourquoi on peut représenter les nombres réels par les points d'une droite graduée.

Petite synthèse finale

Pour rédiger un exposé purement mathématique sur les nombres, on adopte généralement une progression qui ne suit pas exactement l'évolution historique. On admet d'abord l'existence des nombres entiers naturels (c'est-à-dire positifs et on indique comment les additionner et les multiplier. Puis on constate qu'une différence comme $2 - 7$ n'est pas un entier naturel. Alors on introduit les entiers relatifs, qui englobent les entiers naturels, et avec lesquels la soustraction est toujours possible. Puis on constate qu'un quotient comme $3 : 10$ ou $(-7) : (-5)$ n'est pas un entier relatif. Alors on introduit les nombres rationnels, qui englobent les entiers relatifs, et avec lesquels la division est toujours possible, sauf par zéro. Puis on constate qu'on n'a toujours pas «attrapé» des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π qui ne peuvent pas s'écrire comme des fractions. Alors on introduit les nombres réels, qui contiennent tous les rationnels et les irrationnels. Le programme de collège s'arrête ici, mais d'autres aventures passionnantes vous attendent au lycée et à l'université...

Les ensembles de nombres *(introduction .au programme de seconde)*

- l'ensemble des entiers naturels (0 ; 1 ; 2 ; 5 ; ….) : il se note $\mathbb{N}$;
- l'ensemble des entiers relatifs (-3 ; -15 ; 0 ; 2 ; ……) ; il se note $\mathbb{Z}$;
- l'ensemble des nombres décimaux (2,4 ; 0,0256 ; -6,1 ; ….) ; il se note $\mathbb{D}$;
- l'ensemble des nombres rationnels ($\frac{1}{2}$; $\frac{-5}{12}$; 2 ; …) ; il se note $\mathbb{Q}$;
- l'ensemble des nombres irrationnels(non rationnels) : π ; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; ….et enfin
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (qui contient tous les précédents)