II] Méthode pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels avec a > b.

<u>Méthode n°1</u> : Dresser la liste des diviseurs de a puis la liste des diviseurs de b. Prendre le plus grand des diviseurs commun à a et b.

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (48 ; 90) :

Diviseurs de 48 :	1	2	3	4	6				
	48	24	16	12	8				
Diviseurs de 90 :	1	2	3	5	6	9			
	90	45	30	18	15	10			Donc PGCD (48 ; 90) = 6.

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (210 ; 52) :

Diviseurs de 210 :	1	2	3	5	6	7	10	14	
	210	105	70	42	35	30	21	15	
Diviseurs de 52 :	1	2	4						
	52	26	13						Donc PGCD (210 ; 52) = 2.

Cette méthode est limitée à des nombres pas trop grands car il devient vite long de dresser la liste des diviseurs de grands nombres… Par exemple, comment trouver PGCD (5148 ; 1386) ?

<u>Méthode n°2 (« méthode des soustractions successives »)</u> : Basée sur l'idée suivante : si un nombre est diviseur commun à a et b, alors il est diviseur de $a - b$. Donc l'ensemble des diviseurs communs à a et b revient à l'ensemble des diviseurs communs à b (le plus petit des deux) et $a - b$. On continue alors les soustractions jusqu'à obtenir des nombres de plus en plus petit…

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (261 ; 203) : J'utilise la méthode des soustractions successives :

261 – 203 = 58	(on garde 58 et 203)
203 – 58 = 145	(on garde 58 et 145)
145 – 58 = 87	(on garde 58 et 87)
87 – 58 = 29	(on garde 58 et 29)
58 – 29 = 29	(on garde 29 et 29 donc le PGCD est 29 !)
29 – 29 = 0	Donc PGCD (261 ; 203) = 29.

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (9240 ; 3822). [14 étapes par la méthode des soustractions successives]

<u>Méthode n°3 (« méthode des divisions successives » ou « algorithme d'Euclide »)</u> : On utilise les restes dans les divisions euclidiennes successives. Cela revient à effectuer « plusieurs soustractions d'un coup »…

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (261 ; 203) : J'utilise la méthode des divisions successives :

$261 = 1 \times 203 + 58$	(on garde 58 et 203)	
$203 = 3 \times 58 + 29$	(on garde 58 et 29)	
$58 = 2 \times 29 + 0$	Donc PGCD (261 ; 203) = 29.	(C'est le dernier reste non nul.)

<u>Exemple</u> : trouver PGCD (9240 ; 3822). [5 étapes par la méthode des divisions successives]