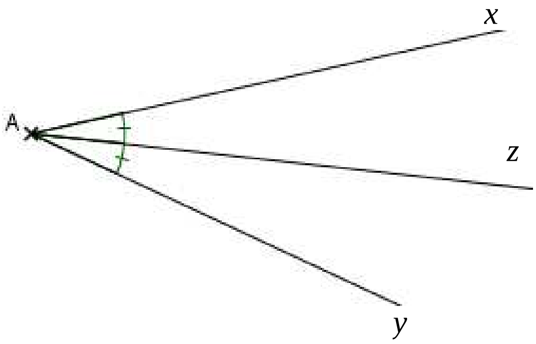
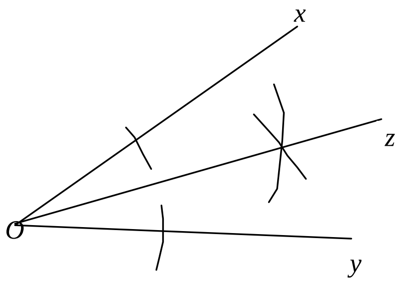
III] Bissectrices et cercle inscrit

Définition : La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet qui partage cette angle en deux angles égaux.

« [A*z*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$. »



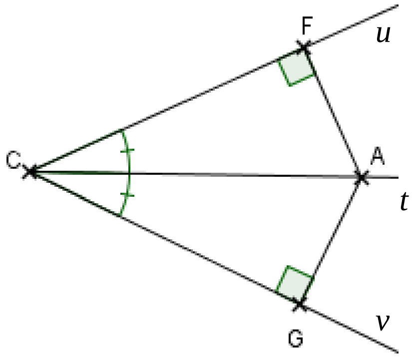
Méthode de construction au compas : pour construire la médiatrice de l'angle $\widehat{xOy}$ ci-contre, en prenant un écart de compas quelconque, on construit un losange « à l'intérieur » de l'angle. La demi-droite [Oz) est alors l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{xOy}$ donc elle le partage bien en deux angles égaux. C'est donc la bissectrice de cet angle.



Propriété 1 (justifiée à l'oral) : Si M appartient à la bissectrice d'un angle alors M est à égale distance des côtés de l'angle.

Exemple : sur le dessin ci-contre, [C*t*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{uCv}$ et A est un point de [C*t*). Justifions que AG = AF.

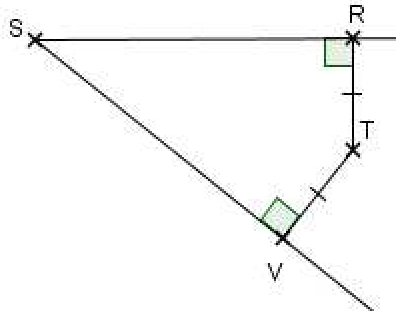
« Comme A est sur la bissectrice de $\widehat{uCv}$ alors A est à égale distance de [Cu) et [Cv). Alors AF = AG. »



Propriété 2 (réciproque de la propriété 1, justifiée à l'oral) : Si M est à égale distance des côtés de l'angle alors M appartient à la bissectrice de l'angle.

Exemple : Sur le dessin ci-contre, TR = TV. Justifions que [ST) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RSV}$.

« Comme TR = TV alors T est à égale distance de [SR) et [SV). Alors T est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{RSV}$. Alors [ST) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RSV}$. »



Remarque : les propriétés 1 et 2 nous permettent d'affirmer que la bissectrice d'un angle **est** l'ensemble des points équidistants des côtés de cet angle.

Activité : Construire un triangle ABC tel que AB = 10 cm ; $\widehat{CAB}$ = 48° et $\widehat{ABC}$ = 32°

2) Construire la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et la bissectrice de $\widehat{BAC}$: elles se coupent en I.

3) Placer J, K, L les points tels que : IJ soit la distance de I à (AB), IK soit la distance de I à (AC) et IL soit la distance de I à (BC).

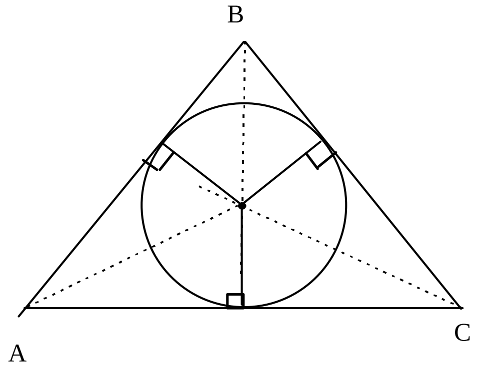
4) Démontrer que IK = IJ et que IJ = IL.

5) Démontrer que I est sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$. Que dire alors de [CI) ?

6) Tracer le cercle (C) de centre I passant par K. Démontrer que J et L sont sur ce cercle.

7) Que représentent les trois côtés du triangle pour le cercle (C) ?

Propriété 3 : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle .



Méthode sur un exemple : tracer le triangle DEF tel que DE = 6 cm ; EF = 5 cm et DF = 8 cm.

On veut construire le cercle inscrit dans le triangle DEF. Pour cela, il suffit de tracer deux bissectrices du triangle : leur intersection est le centre du cercle inscrit. Ensuite, on mène la perpendiculaire à un des côtés du triangle passant par le centre du cercle inscrit : cela nous donne le rayon du cercle inscrit.

[figure geogebra]

Exemple fondamental (pour la rédaction) :

1) Tracer le triangle ABC tel que AB = 6 cm ; $\widehat{BAC}$ = 110° et $\widehat{ABC}$ = 50°.

2) Tracer la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Elles se coupent en S.

3) Démontrer que [CS) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

4) Déterminer la valeurs des angles du triangle CSA.

[figure geogebra]